

ENA 2027 – Gabarito com Soluções

01. Escolhendo aleatoriamente um natural $1 \leq n \leq 100$, qual é a probabilidade de n **não** ser um múltiplo de 6?

- (A) 16%
- (B) 21%
- (C) 72%
- (D) 83%
- (E) 84%

Resposta: E

A quantidade de múltiplos de 6 é dada por $\left\lfloor \frac{100}{6} \right\rfloor = 16$ múltiplos de 6.

Casos favoráveis (não ser múltiplo de 6):

Subtraindo os múltiplos de 6 do total, temos: $100 - 16 = 84$ números que **não** são múltiplos de 6.

Probabilidade: A probabilidade é a razão entre os casos favoráveis e os casos possíveis: $P = \frac{84}{100} = 84\%$.

02. É estimado que a população de um país cresça 1% ao ano, nos próximos n anos. Se a população atual é igual a P_0 , qual a estimativa para a população daqui a n anos?

- (A) $1,01^n P_0$
- (B) $(1 + 0,01^n) P_0$
- (C) $(1 + 0,01n) P_0$
- (D) $0,01^n P_0$
- (E) $1,1^n P_0$

Resposta: A

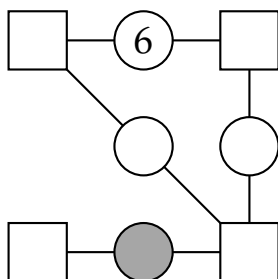
O crescimento de 1% ao ano significa que, a cada ano, a população é multiplicada por

$$1 + \frac{1}{100} = 1 + 0,01 = 1,01.$$

- Após 1 ano: $P_1 = P_0 \cdot 1,01$.
- Após 2 anos: $P_2 = P_1 \cdot 1,01 = P_0 \cdot (1,01)^2$.
- Após n anos: $P_n = P_0 \cdot (1,01)^n$.

Portanto, a estimativa para a população daqui a n anos é igual a $P_0 \cdot (1,01)^n$.

03. Os números inteiros do conjunto $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ devem ser distribuídos nas oito figuras geométricas a seguir (quatro quadrados e quatro círculos), de modo que cada número seja utilizado exatamente uma vez:



A regra estabelece que o número contido em cada círculo é igual à soma dos números contidos nos dois quadrados diretamente ligados a ele.

O número a ser colocado no interior do círculo cinza é:

- (A) 4
- (B) 5
- (C) 7
- (D) 8
- (E) 9

Resposta: D

Sejam SE , SD , IE , ID os quatro quadrados (superior-esquerdo, superior-direito, inferior-esquerdo e inferior-direito, respectivamente).

Ligações da figura:

Temos que $SE + SD = 6$; os dois círculos do meio valem $SE + ID$ e $SD + ID$; o círculo cinza vale $IE + ID$.

1) $SE + SD = 6$, com valores distintos em $\{2, 3, 4, 5, 7, 8, 9\} \implies$ a única possibilidade é $\{SE, SD\} = \{2, 4\}$.

2) Os círculos do meio valem $ID + 2$ e $ID + 4$, que precisam ser $\leq 9 \implies ID \leq 5$. Logo $ID \in \{3, 5\}$.

- Testando $ID = 3$. Isso implica que os círculos do meio devem ser preenchidos com 5 e 7. Sobram 8 e 9 para IE e cinza = $IE + 3$ — não bate com nenhum dos dois.
- Testando $ID = 5$: círculos do meio = 7, 9; sobram $\{3, 8\}$; com $IE = 3$, cinza = $3 + 5 = 8$. ✓

Portanto, o número a ser colocado no interior do círculo cinza é 8.

04. O valor de k para que as equações do primeiro grau em x dadas por $2x + 3k - 5 = 0$ e $7x - 13k + 9 = 0$ tenham a mesma solução é igual a

- (A) $\frac{39}{41}$.
- (B) $\frac{53}{47}$.
- (C) $\frac{63}{71}$.
- (D) $\frac{53}{49}$.
- (E) $\frac{73}{91}$.

Resposta: B

Da primeira equação, $2x + 3k - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{5 - 3k}{2}$.

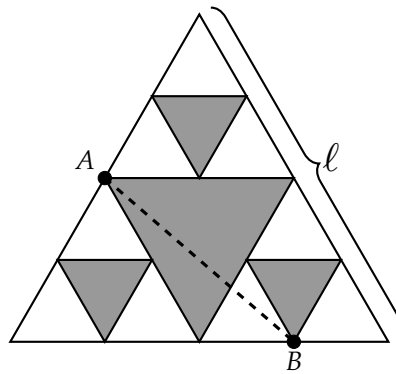
Da segunda, $7x - 13k + 9 = 0 \Rightarrow x = \frac{13k - 9}{7}$.

Como as soluções devem ser iguais, $\frac{5 - 3k}{2} = \frac{13k - 9}{7}$.

Logo, $35 - 21k = 26k - 18$, e, assim, $53 = 47k$.

Portanto, $k = \frac{53}{47}$.

05. A logomarca do PROFMAT é inspirada em uma construção fractal clássica baseada em triângulos equiláteros, o triângulo de Sierpinski. Considere um triângulo equilátero principal de lado ℓ . Inicialmente, subdivide-se esse triângulo em quatro triângulos equiláteros menores e congruentes ligando-se os pontos médios de seus lados. Em seguida, repete-se o mesmo procedimento em cada um dos três triângulos menores dos cantos, como ilustrado na figura a seguir.



O ponto A é o ponto médio do lado esquerdo do triângulo principal, e o ponto B é o vértice inferior do triângulo invertido desenhado no canto inferior direito, situado sobre a base do triângulo maior.

Nesse caso, a distância entre os pontos A e B é igual a:

(A) $\frac{\ell\sqrt{7}}{4}$

(B) $\frac{\ell\sqrt{5}}{4}$

(C) $\frac{\ell\sqrt{3}}{4}$

(D) $\frac{\ell\sqrt{3}}{2}$

(E) $\frac{\ell\sqrt{7}}{2}$

Resposta: A

Seja C o vértice inferior esquerdo.

O ângulo $\widehat{ACB}$ mede 60° . O lado AC mede $\frac{\ell}{2}$ e o lado BC mede $\frac{\ell}{2} + \frac{\ell}{4} = \frac{3\ell}{4}$.

Aplicando a lei dos cossenos no triângulo ABC temos

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{AC} \cdot \overline{BC} \cdot \cos(60) = \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\ell}{4}\right)^2 - 2 \cdot \frac{\ell}{2} \cdot \frac{3\ell}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7\ell^2}{16}$$

Portanto, $\overline{AB} = \frac{\ell\sqrt{7}}{4}$.

Solução Alternativa

Temos que $\overline{AB}$ é a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos medem $\frac{\ell}{2}$ e h , onde h é a medida da altura de um triângulo equilátero de lado $\frac{\ell}{2}$.

$$\text{Assim } h^2 = \frac{\ell^2}{4} - \frac{\ell^2}{16} = \frac{3\ell^2}{16}.$$

$$\text{Logo, } AB^2 = \frac{3\ell^2}{16} + \frac{\ell^2}{4} = \frac{7\ell^2}{16}.$$

$$\text{Portanto, } AB = \frac{\ell\sqrt{7}}{4}.$$

06. A região sombreada da figura da questão anterior é formada pela união do triângulo central da primeira etapa com os três triângulos invertidos menores obtidos na segunda etapa.

A razão entre a área da região sombreada e a área do triângulo principal, de lado ℓ , é igual a:

- (A) $\frac{1}{4}$
- (B) $\frac{5}{16}$
- (C) $\frac{7}{16}$
- (D) $\frac{9}{16}$
- (E) $\frac{11}{16}$

Resposta: C

O triângulo central da primeira etapa tem lado $\frac{\ell}{2}$, logo área $\frac{1}{4}$ da área do triângulo principal.

Cada um dos 3 triângulos de canto (primeira etapa) também tem área $\frac{1}{4}$ da área principal; dentro de cada um deles, o triângulo invertido da segunda etapa tem área $\frac{1}{4}$ da área do triângulo-canto, ou seja, $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$ da área principal.

Como são 3 desses triângulos: $3 \times \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$.

Portanto, a área sombreada total é igual a $\frac{1}{4} + \frac{3}{16} = \frac{4}{16} + \frac{3}{16} = \frac{7}{16}$.

07. Em uma progressão aritmética de 2001 termos, o primeiro e o último termos são 17 e 4043, respectivamente. O milésimo primeiro termo dessa progressão é igual a

- (A) 1940.
- (B) 1960.
- (C) 2010.
- (D) 2030.
- (E) 2050.

Resposta: D

A razão da progressão aritmética pode ser obtida por $r = \frac{a_{2001} - a_1}{2001 - 1} = \frac{4043 - 17}{2001 - 1} = \frac{4026}{2000} = 2,013$.

Portanto $a_{1001} = a_1 + 1000r = 17 + 1000(2,013) = 17 + 2013 = 2030$.

08. Considere as afirmações abaixo envolvendo números reais:

- I. Se x e y são racionais não nulos, então $x + y\sqrt{2}$ é irracional.
- II. Se x é um número irracional positivo, então $\sqrt{x}$ é irracional.
- III. Se $\sqrt[4]{x}$ é irracional, então $\sqrt{x}$ é irracional.

É correto o que se afirma em

- (A) II, apenas.
- (B) III, apenas.
- (C) I e II, apenas.
- (D) I e III, apenas.
- (E) I, II e III.

Resposta: C

A afirmação I é verdadeira. Se $x, y \in \mathbb{Q}$, com $y \neq 0$, então $y\sqrt{2}$ é irracional.

Se $x + y\sqrt{2}$ fosse racional, então $y\sqrt{2} = (x + y\sqrt{2}) - x$ seria racional, uma contradição.

A afirmação II também é verdadeira.

Se $\sqrt{x}$ fosse racional, então $x = (\sqrt{x})^2$ seria racional, contradizendo o fato de x ser irracional.

A afirmação III é falsa. Por exemplo, $\sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$ é irracional, mas $\sqrt{4} = 2$ é racional.

Portanto, apenas I e II são verdadeiras.

09. O perímetro de um retângulo é 20% maior que o perímetro de um quadrado. Sabendo que um dos lados do retângulo é 20% menor que o lado do quadrado, é correto afirmar que a área do retângulo é

- (A) igual à área do quadrado.
- (B) 28% maior do que a área do quadrado.
- (C) 20% menor do que a área do quadrado.
- (D) 25% menor do que a área do quadrado.
- (E) 30% maior do que a área do quadrado.

Resposta: B

Se ℓ é o comprimento do lado do quadrado, então o perímetro do quadrado é igual a 4ℓ .

Logo o perímetro do retângulo será igual a $1,2 \cdot 4\ell = 4,8\ell$.

Um lado do retângulo tem comprimento $0,8\ell$ e assim o outro lado, digamos b , deve satisfazer

$2 \cdot 0,8\ell + 2b = 4,8\ell$, ou seja, $b = 1,6\ell$.

Logo, Área retângulo = $0,8\ell \times 1,6\ell = 1,28\ell^2 = 128\%$ da área do quadrado,.

Portanto, a área do retângulo é 28% maior do que a área do quadrado

10. A média de emissão anual de carbono de uma frota de 15 navios era de 28 mil toneladas por embarcação. Dois desses navios, que emitiam anualmente, um 46 mil e o outro 20 mil toneladas, foram retirados de circulação. A nova média de emissão anual dos 13 navios restantes, em milhares de toneladas, passou a ser de aproximadamente:

- (A) 26,4
- (B) 27,2
- (C) 27,8
- (D) 28,0
- (E) 28,6

Resposta: B

A soma total é dada por $15 \times 28 = 420$ mil toneladas.

Retirando os navios de 46 e 20 toneladas obtemos a nova soma $420 - 46 - 20 = 354$.

Portanto a nova média será igual a $\frac{354}{13}$ que é aproximadamente igual a 27,2 toneladas.

11. Sejam A , B e C subconjuntos de um conjunto U . Denotamos por X^c o complementar de X em relação a U . Sabe-se que $A \cap B = \emptyset$ e $A \subset C$. Qual das expressões abaixo é necessariamente igual a $\emptyset$?

- (A) $A \cap (B \cup C^c)$
- (B) $(A \cup B) \cap C^c$
- (C) $(A \cap C) \cup B$
- (D) $(A \cup C) \cap B$
- (E) A^c

Resposta: A

Como $A \subset C$, temos que $A \cap C^c = \emptyset$.

Como $A \cap B = \emptyset$ (dado), segue que $A \cap (B \cup C^c) = (A \cap B) \cup (A \cap C^c) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$.

O exemplo abaixo mostra que (B), (C), (D) e (E) podem todas ser não vazias simultaneamente, confirmando que apenas (A) é necessariamente igual a $\emptyset$.

Tome $U = \{1, 2, 3, 4\}$ e $A = \{1\}$, $C = \{1, 2\}$ ($A \subset C \checkmark$), $B = \{2, 3\}$ ($A \cap B = \emptyset \checkmark$).

(B): $(A \cup B) \cap C^c = \{1, 2, 3\} \cap \{3, 4\} = \{3\} \neq \emptyset$.

(C): $(A \cap C) \cup B = \{1\} \cup \{2, 3\} = \{1, 2, 3\} \neq \emptyset$.

(D): $(A \cup C) \cap B = \{1, 2\} \cap \{2, 3\} = \{2\} \neq \emptyset$.

(E): $A^c = \{2, 3, 4\} \neq \emptyset$.

12. Quantos números naturais de três algarismos **não** possuem o algarismo 5 em sua representação decimal?

- (A) 648
- (B) 720
- (C) 729
- (D) 810
- (E) 900

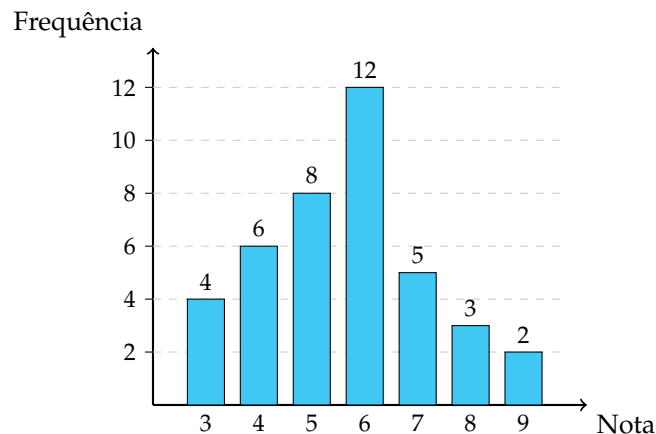
Resposta: A

Para o algarismo das centenas, temos 8 possibilidades: 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9.

Para cada um dos algarismos das dezenas e das unidades, temos 9 possibilidades, pois podemos utilizar qualquer algarismo de 0 a 9, exceto o 5.

Pelo princípio multiplicativo, a quantidade de números procurada é $8 \cdot 9 \cdot 9 = 648$.

13. O gráfico a seguir apresenta a distribuição de frequências das notas obtidas pelos 40 candidatos que prestaram um concurso público:



Sejam m , M e M_O a média aritmética, a mediana e a moda desse conjunto de dados, respectivamente. A relação correta de ordem entre essas três medidas é:

- (A) $m < M < M_O$.
- (B) $m = M < M_O$.
- (C) $M < m < M_O$.
- (D) $M_O < M < m$.
- (E) $m < M_O = M$.

Resposta: E

A partir do gráfico, as frequências são

Nota	3	4	5	6	7	8	9
Frequência	4	6	8	12	5	3	2
Freq acumulada	4	10	18	30	35	38	40

A nota 6 possui a maior frequência, logo $M_O = 6$.

Como há 40 candidatos, a mediana é a média entre o 20º e o 21º valores.

Ambos correspondem à nota 6, segue que $M = 6$.

A média é $m = \frac{3 \cdot 4 + 4 \cdot 6 + 5 \cdot 8 + 6 \cdot 12 + 7 \cdot 5 + 8 \cdot 3 + 9 \cdot 2}{40} = \frac{225}{40} = 5,625$.

Portanto, $m < M_O = M$.

14. Um trapézio isósceles possui bases de comprimentos 8 cm e 4 cm. Seus lados não paralelos medem 4 cm. A área desse trapézio, em cm^2 , é:

- (A) $4\sqrt{3}$
- (B) $6\sqrt{3}$
- (C) $8\sqrt{3}$
- (D) $10\sqrt{3}$
- (E) $12\sqrt{3}$

Resposta: E

Em um trapézio isósceles, as projeções dos lados oblíquos sobre a base maior são iguais.

A diferença entre as bases é $B - b = 8 - 4 = 4$ cm

Logo, cada projeção mede $\frac{4}{2} = 2$ cm.

Assim, teremos um triângulo retângulo cuja hipotenusa é o lado inclinado $\ell = 4$ cm e um dos catetos é a projeção 2 cm.

A altura h é o outro cateto.

Pelo teorema de Pitágoras segue que $h^2 + 2^2 = 4^2 \implies h^2 + 4 = 16 \implies h^2 = 12 \implies h = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ cm.

Assim a área do trapézio é dada por $A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$.

Portanto $A = \frac{(8 + 4) \cdot 2\sqrt{3}}{2} = \frac{12 \cdot 2\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$.

15. Considere uma função quadrática $f(x) = x^2 + bx + c$, cujo gráfico intersecta o eixo x em dois pontos distintos, de abscissas α e β . Sabendo que $|\alpha - \beta| = 4$, podemos afirmar que menor valor assumido por f é:

- (A) -6
- (B) -4
- (C) -3
- (D) -2
- (E) 0

Resposta: B

Como $f(x) = x^2 + bx + c$ é uma função quadrática com raízes α e β , podemos escrever $f(x) = (x - \alpha)(x - \beta)$.

O vértice da parábola está localizado no ponto médio das raízes: $x_v = \frac{\alpha + \beta}{2}$.

Assim segue que $f(x_v) = \left(\frac{\alpha + \beta}{2} - \alpha\right) \left(\frac{\alpha + \beta}{2} - \beta\right) = \frac{\beta - \alpha}{2} \cdot \frac{\alpha - \beta}{2} = -\frac{(\alpha - \beta)^2}{4}$.

Como $|\alpha - \beta| = 4$, temos $f(x_v) = -\frac{4^2}{4} = -4$.

Portanto, o menor valor assumido por f é -4 .

16. Sobre o triângulo de lados 3, 4 e x são feitas as afirmações:

- I. O triângulo é acutângulo se, e somente se, $\sqrt{7} < x < 5$.
- II. O triângulo é retângulo se, e somente se, $x = \sqrt{7}$ ou $x = 5$.
- III. O triângulo é obtusângulo se, e somente se, $1 < x < \sqrt{7}$ ou $5 < x < 7$.

É correto o que se afirma em:

- (A) II, apenas.
- (B) III, apenas.
- (C) I e II, apenas.
- (D) I e III, apenas.
- (E) I, II e III.

Resposta: E

Para que exista um triângulo com lados 3, 4 e x , devemos ter $1 < x < 7$.

Pela lei dos cossenos (ou comparação direta de quadrados), para lados 3, 4, x :

Retângulo: Se x é hipotenusa, então $x^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow x = 5$; se 4 é hipotenusa, $16 = 9 + x^2 \Rightarrow x = \sqrt{7}$.

Logo II é verdadeira.

Acutângulo: se $x > 4$: precisa $x^2 < 25 \Rightarrow x < 5$, dando $4 < x < 5$.

Se $x \leq 4$: precisa $16 < 9 + x^2 \Rightarrow x > \sqrt{7}$, dando $\sqrt{7} < x \leq 4$. Unindo os dois casos segue que $\sqrt{7} < x < 5$.

Logo I é verdadeira.

Obtusângulo: é o que resta dentro da desigualdade triangular $1 < x < 7$: $1 < x < \sqrt{7}$ ou $5 < x < 7$.

Logo III é verdadeira.

Portanto, todas as afirmações são corretas.

17. A soma dos valores reais de x que são soluções da equação $|2x - 1| = |4x + 7|$ é igual a

- (A) -8 .
- (B) -6 .
- (C) -5 .
- (D) -4 .
- (E) -3 .

Resposta: C

Pela propriedade do valor absoluto, $|A| = |B| \Leftrightarrow A = B$ ou $A = -B$.

Logo segue que $|2x - 1| = |4x + 7| \Leftrightarrow 2x - 1 = 4x + 7$ ou $2x - 1 = -(4x + 7)$.

Resolvendo cada equação, obtemos $x = -4$ ou $x = -1$.

Portanto, a soma é $-4 - 1 = -5$.

18. Quantos naturais existem de 1 até 1000 que são múltiplos de 3 ou 5 ?

- (A) 533.
- (B) 510.
- (C) 495.
- (D) 467.
- (E) 437.

Resposta : D

Vamos usar o **Princípio da Inclusão-Exclusão**.

- Múltiplos de 3 no intervalo $[1, 1000]$: $\left\lfloor \frac{1000}{3} \right\rfloor = 333$
- Múltiplos de 5 no intervalo $[1, 1000]$: $\left\lfloor \frac{1000}{5} \right\rfloor = 200$
- Múltiplos de 3 e de 5 simultaneamente (ou seja, múltiplos de 15): $\left\lfloor \frac{1000}{15} \right\rfloor = 66$

Pelo Princípio da Inclusão-Exclusão, a quantidade de números que são múltiplos de 3 ou 5 é igual a $333 + 200 - 66 = 467$.

19. Em uma cidade um taxímetro funciona com uma taxa de embarque de R\$ 6,50 e é projetado para cobrar um valor adicional de R\$ 4,50 por quilômetro rodado. O valor no taxímetro só é alterado quando o táxi roda exatamente 1 km depois da última alteração e a cobrança é feita exclusivamente pelo visor. Uma viagem de 32,5 km terá um custo de

- (A) R\$ 96,50
- (B) R\$ 132,40
- (C) R\$ 144,50
- (D) R\$ 150,50
- (E) R\$ 160,40

Resposta: D

O taxímetro inicia com R\$ 6,50 e acrescenta R\$ 4,50 a cada quilômetro completo percorrido.

Como a viagem tem 32,5 km, o visor terá sido alterado após 32 quilômetros.

Portanto, uma viagem de 32,5 km terá um custo de $6,50 + 32 \cdot 4,50 = 150,50$ reais.

20. Considere a família de funções quadráticas

$f_k(x) = x^2 - 2(k+2)x + (k+14)$, em que $k \in \mathbb{R}$. O conjunto dos valores de k para os quais a função f_k tem dois zeros distintos, ambos maiores que 1 é:

- (A) $k > 11$
- (B) $2 < k < 11$
- (C) $k > 4$
- (D) $-3 < k < 11$
- (E) $k < -3$ ou $k > 11$

Resposta: B

Discriminante > 0 : $4(k+2)^2 - 4(k+14) > 0 \Leftrightarrow (k+2)^2 - (k+14) > 0 \Leftrightarrow k^2 + 3k - 10 > 0 \Leftrightarrow (k+5)(k-2) > 0$, ou seja, $k < -5$ ou $k > 2$.

Vértice > 1 : a soma das raízes é $2(k+2)$, logo a média (abscissa do vértice) é $k+2 > 1 \Leftrightarrow k > -1$.

$f(1) > 0$ (mesmo sinal do coeficiente líder, para que 1 fique fora do intervalo das raízes): $f(1) = 1 - 2(k+2) + (k+14) = 11 - k > 0 \Leftrightarrow k < 11$.

Intersectando as três condições ($k > 2$ já absorve $k > -1$): $2 < k < 11$.

21. Após perceber que seu copo continha uma quantidade de água correspondente a $\frac{2}{3}$ de sua capacidade, Michel bebeu 200 mL de água do copo. Em seguida, verificou que a quantidade de água restante correspondia a $\frac{1}{4}$ da capacidade do copo. Qual é soma dos algarismos da capacidade total do copo, em mL?

- (A) 3
- (B) 4
- (C) 8
- (D) 10
- (E) 12

Resposta : E

Seja C a capacidade total do copo (em mL).

Inicialmente, a quantidade de água era: $\frac{2}{3}C$.

Após beber 200 mL, a quantidade restante é: $\frac{2}{3}C - 200$.

Do enunciado temos que: $\frac{2}{3}C - 200 = \frac{1}{4}C$.

Portanto, a capacidade total do copo é $C = 480$ mL.

A soma dos algarismos de 480 é igual a $4 + 8 + 0 = 12$.

22. A solução da inequação $\frac{1}{x-1} > \frac{1}{x-2}$ é dada pelo conjunto

- (A) $\emptyset$.
- (B) $\mathbb{R} - \{1, 2\}$.
- (C) $[-2, 1) \cup (1, +\infty)$.
- (D) $(1, 2)$.
- (E) $(2, +\infty)$.

Resposta: D

Temos que

$$\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} > 0 \Leftrightarrow \frac{(x-2) - (x-1)}{(x-1)(x-2)} > 0 \Leftrightarrow \frac{-1}{(x-1)(x-2)} > 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2) < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 2.$$

23. Um quadrado $ABCD$ tem lado 4 cm. Seja M o ponto médio do lado AB , e considere o segmento MC . Qual é o valor de $\sin \widehat{MCD}$?

- (A) $\frac{\sqrt{5}}{5}$
- (B) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$
- (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- (D) $\frac{1}{2}$
- (E) $\frac{2}{\sqrt{5}}$

Resposta: Anulada, pois há duas respostas corretas: B e E.

Observe que o ângulo $\widehat{MCD} = \widehat{CMB}$ e pelo teorema de Pitágoras no triângulo MBC , a medida de MC é igual a $2\sqrt{5}$.

Portanto, $\sin \widehat{MCD} = \sin \widehat{CMB} = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

24. Um pirata encontrou um baú com três cofres, escondidos numa ilha. Apenas **um** dos cofres continha o tesouro; os outros dois continham armadilhas mortais. Em cada cofre havia uma inscrição gravada:

- Cofre I: "O tesouro está neste cofre."
- Cofre II: "Este cofre não guarda o tesouro."
- Cofre III: "O tesouro não está no cofre I."

Sabendo que **somente uma** das três inscrições é verdadeira, assinale a alternativa que identifica corretamente a **inscrição verdadeira** e o **cofre que contém o tesouro**:

- (A) I: verdadeira; tesouro em I.
- (B) II: verdadeira; tesouro em II.
- (C) III: verdadeira; tesouro em II.
- (D) III: verdadeira; tesouro em III.
- (E) II: verdadeira; tesouro em III.

Resposta: C

Testando cada hipótese (tesouro em I, II ou III) e contando quantas inscrições ficam verdadeiras:

- Tesouro em I: I verdadeira, II verdadeira (não guarda em II), III falsa $\rightarrow$ 2 verdadeiras. (não serve!)
- Tesouro em II: I falsa, II falsa, III verdadeira (não está em I) $\rightarrow$ exatamente 1 verdadeira. (serve!)
- Tesouro em III: I falsa, II verdadeira, III verdadeira $\rightarrow$ 2 verdadeiras. (não serve!)

Portanto, a inscrição III é a verdadeira, e o tesouro está no cofre II.

25. Considere como unidade de área a área de um triângulo equilátero de lado 1 cm. Nessa unidade, a área de um quadrado de lado 3 cm é igual a:

- (A) $12\sqrt{3}$
- (B) $18\sqrt{3}$
- (C) $24\sqrt{3}$
- (D) $32\sqrt{3}$
- (E) $36\sqrt{3}$

Resposta: A

A área de um triângulo de lado 1 cm é igual a $\frac{\sqrt{3}}{4}$ cm².

A área do quadrado é o quadrado de lado 3 cm é igual a 9 cm².

Para encontrar quantas unidades de área cabem no quadrado, dividimos a área do quadrado pela área da unidade:

$$\frac{A_{\text{quadrado}}}{A_{\text{unidade}}} = \frac{9}{\frac{\sqrt{3}}{4}} = 9 \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{36}{\sqrt{3}} = 12\sqrt{3}.$$

26. Uma urna contém 10 bolas numeradas, das quais 6 são vermelhas. De quantas maneiras podemos retirar 4 bolas, de modo que o número de bolas vermelhas retiradas seja maior ou igual ao número de bolas vermelhas que permanecerão na urna?

- (A) 80
- (B) 90
- (C) 95
- (D) 105
- (E) 185

Resposta: C

Urn com 6 vermelhas e 4 não vermelhas; retiram-se 4 bolas.

Se r é o número de vermelhas retiradas, a condição é $r \geq 6 - r \Leftrightarrow r \geq 3$.

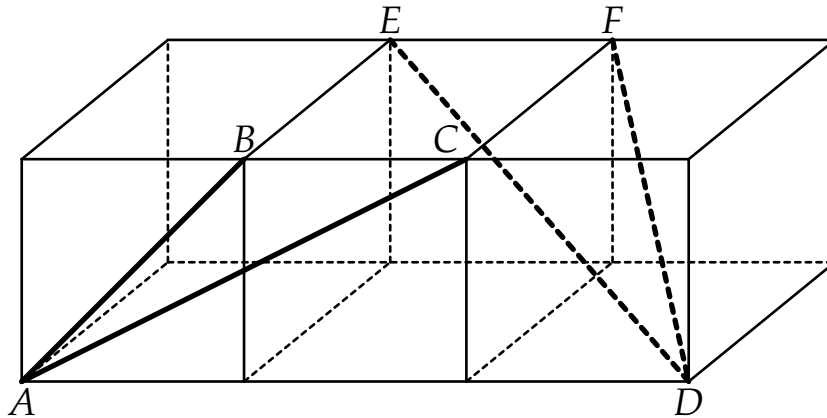
Temos dois casos:

$$r = 3 : \binom{6}{3} \binom{4}{1} = 20 \times 4 = 80.$$

$$r = 4 : \binom{6}{4} \binom{4}{0} = 15 \times 1 = 15.$$

Somando as dois casos segue que temos $80 + 15 = 95$ maneiras.

27. A figura abaixo mostra três cubos de arestas 1 justapostos.

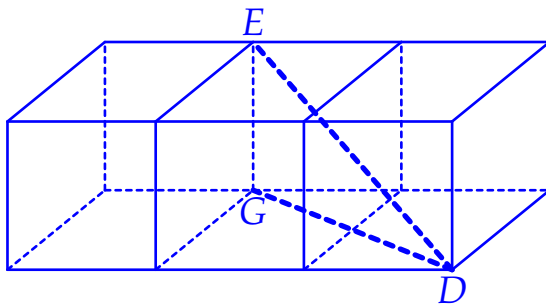


Qual dos valores abaixo não pertence ao conjunto das medidas dos segmentos AB , AC , DE e DF ?

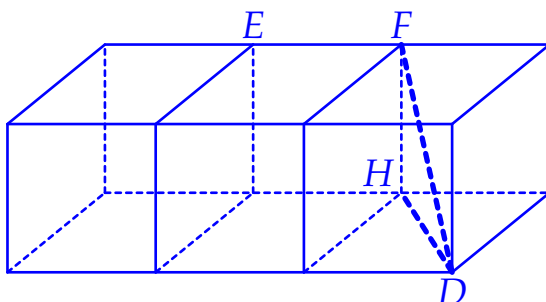
- (A) $\sqrt{2}$
- (B) $\sqrt{3}$
- (C) $\sqrt{5}$
- (D) $\sqrt{6}$
- (E) $\sqrt{7}$

Resposta: E

O segmento AB é hipotenusa de triângulo retângulo com dois catetos de medida 1, logo, $\overline{AB}^2 = 1^2 + 1^2 = 2$, o que nos dá $\overline{AB} = \sqrt{2}$. O segmento AC é hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos 1 e 2, logo $\overline{AC}^2 = 1^2 + 2^2 = 5$, e assim $\overline{AC} = \sqrt{5}$.



Na figura acima, DG é diagonal de um triângulo retângulo de catetos 1 e 2. Assim, temos $\overline{DG} = \sqrt{5}$. Como DE é hipotenusa do triângulo retângulo de catetos de medidas $\overline{DG} = \sqrt{5}$ e 1, temos $\overline{DE}^2 = \overline{DG}^2 + 1^2 = 5 + 1 = 6$, logo $\overline{DE} = \sqrt{6}$.



Na figura acima, temos $\overline{DH} = \sqrt{2}$, logo $\overline{DF}^2 = \overline{DH}^2 + 1^2 = 3$. Assim, $\overline{DF} = \sqrt{3}$. Com isso, apenas $\sqrt{7}$ não aparece no conjunto das medidas de AB , AC , DE e DF .

28. Considere números reais a, b e c tais que $\frac{a}{b} = 4$ e $\frac{b}{c} = 3$. Neste caso, $\frac{a+b}{c} + \frac{a}{b+c}$ é igual a:

- (A) $\frac{15}{4}$
- (B) 16
- (C) 18
- (D) 19
- (E) 21

Resposta: C

Na primeira parcela, dividindo o numerador e o denominador por b , segue que $\frac{a+b}{c} = \frac{\frac{a}{b} + 1}{\frac{c}{b}} = \frac{4+1}{1/3} = 15$.

Na segunda parcela, $\frac{a}{b+c} = \frac{\frac{a}{b}}{1 + \frac{c}{b}} = \frac{4}{1+1/3} = \frac{4}{4/3} = 3$.

Portanto, $\frac{a+b}{c} + \frac{a}{b+c} = 15 + 3 = 18$.

29. O valor da expressão $\frac{(\sqrt{18!} + \sqrt{17!})(\sqrt{18} - 1)}{17\sqrt{16!}}$ é:

- (A) $\frac{1}{\sqrt{17}}$
- (B) $\frac{(\sqrt{18} + 1)^2}{17}$
- (C) 1
- (D) $\sqrt{17}$
- (E) $\frac{(\sqrt{18} - 1)}{17}$

Resposta: D

Temos $\sqrt{18!} = \sqrt{18 \cdot 17 \cdot 16!} = \sqrt{18} \sqrt{17} \sqrt{16!}$ e $\sqrt{17!} = \sqrt{17} \sqrt{16!}$.

Logo, $\sqrt{18!} + \sqrt{17!} = \sqrt{17} \sqrt{16!} (\sqrt{18} + 1)$.

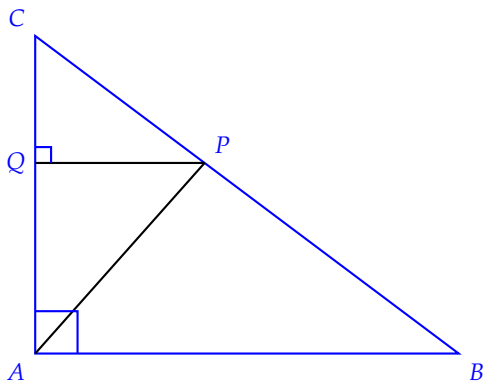
Multiplicando por $(\sqrt{18} - 1)$, obtemos $\sqrt{17} \sqrt{16!} (\sqrt{18} + 1)(\sqrt{18} - 1)$.

Como $(\sqrt{18} + 1)(\sqrt{18} - 1) = 17$, a expressão toda vale $\frac{17\sqrt{17}\sqrt{16!}}{17\sqrt{16!}} = \sqrt{17}$.

30. Em um triângulo ABC retângulo em A toma-se um ponto P no interior de BC tal que $\frac{\overline{PC}}{\overline{PB}} = \frac{2}{3}$. Sabendo que $\overline{AC} = 12$ e $\overline{AB} = 16$, determine a tangente do ângulo $\angle PAC$.

- (A) $\frac{8}{9}$
- (B) $\frac{7}{9}$
- (C) $\frac{2}{3}$
- (D) $\frac{5}{9}$
- (E) $\frac{1}{3}$

Resposta: A



Sejam θ o ângulo $\angle PAC$ e Q o pé da perpendicular baixada de P sobre AC .

Temos então que:

- $\frac{\overline{AB}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{PC}} = \frac{5}{2} \rightarrow \overline{PQ} = \frac{32}{5}$.
- $\frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{QC}} = \frac{3}{2}$ e como $\overline{AQ} + \overline{QC} = 12$, temos que $\overline{AQ} = \frac{36}{5}$.

Portanto, $\operatorname{tg} \theta = \frac{\overline{PQ}}{\overline{AQ}} = \frac{8}{9}$.